

Etude et graphique de :

$$\rho = a \frac{\theta}{\theta^2 - 1} \quad a > 0$$

* $\rho(\theta)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Étant impaire, on fera l'étude pour $\theta \in [0, +\infty[\setminus \{1\}$ puis on complètera par symétrie $\frac{1}{2} O y$.

$$* \rho' = -a \frac{1 + \theta^2}{(\theta^2 - 1)^2} < 0$$

θ	0	1	$+\infty$
ρ'		-	-
ρ	0 $\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

* Branche infinie en $\theta = 1$:

$\lim_{\theta \rightarrow 1} \rho(\theta) = \pm\infty$ montre que la droite $\theta = 1$ (NB : $1 \text{ rad} \simeq 57^\circ$) est direction asymptotique de la courbe pour $\theta \rightarrow 1$.

$$\rho \sin(\theta - 1) = a \frac{\theta \sin(\theta - 1)}{\theta^2 - 1} \rightarrow \frac{a}{2} \quad (\theta \rightarrow 1)$$

montre que la courbe admet une asymptote pour $\theta \rightarrow 1$: la droite de direction $\theta = 1$ et d'équation $y = \frac{a}{2}$ dans le repère $\mathcal{R}_1 \equiv (O, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$, où $\vec{u}_\theta \equiv \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = \vec{u}_\theta'$.

* En $\theta = 0$, $\rho = 0$ et la tangente en $M(0)$ sera l'axe polaire : elle sera horizontale.

* $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \rho(\theta) = 0$ donc O est un point - asymptote. La courbe s'enroule autour de O .

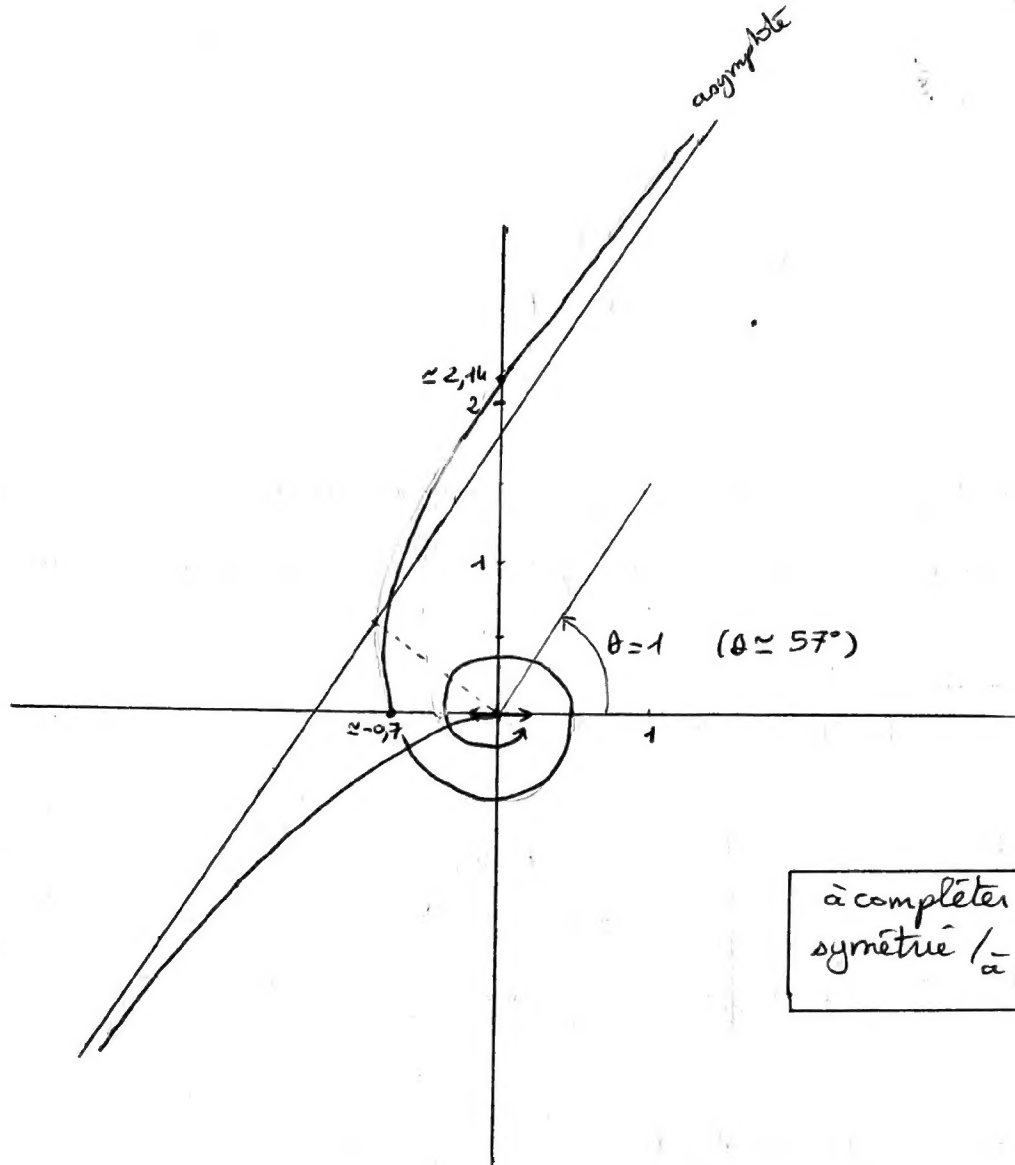


figure pour $a = 2$ $\begin{cases} \theta = \pi & r \approx 0,7 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & r \approx 2,14 \end{cases}$

* Position de l'asymptote /_ la courbe :

On travaille à nouveau dans le repère $(O, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ (où $\vec{u}_0 = \cos \theta \vec{z} + \sin \theta \vec{j} \dots$)

Il faut étudier le signe de

$$\mathcal{F} \doteq r \sin(\theta - 1) - \frac{a}{2} = a \frac{(h+1) \sin h}{h(h+2)} - \frac{a}{2} \quad \text{où } h \doteq \theta - 1$$

$$\begin{aligned} \text{De } \frac{\sin h}{h} &= 1 + o(h) \quad \text{et} \quad \frac{h+1}{h+2} = \frac{1}{2} \frac{h+1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} (1+h) \left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h}{2} + o(h)\right) \end{aligned}$$

$$\text{on déduit } \mathcal{F} = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{h}{2} + o(h)\right) (1 + o(h)) - \frac{a}{2} = \frac{a}{4} h + o(h)$$

\mathcal{F} sera donc du signe de $\frac{a}{4} h$, ie de h , lorsque h sera proche de 0.

Si $h \rightarrow 0_+$, $\mathcal{F} > 0$ et si $h \rightarrow 0_-$, $\mathcal{F} < 0$. La courbe sera donc sous l'asymptote si $\theta \rightarrow 1_-$ et dessus l'asymptote si $\theta \rightarrow 1_+$. FIN